1.3. Sabit katsayılı Homojen Lineer Diferansiyel Denklemler

$$Ly := y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)\, y' + p_n(x)\, y = B(x)$$

denkleminde

$p_1(x) = p_1,\ p_2(x) = p_2, \ldots, p_n(x) = p_n$ şeklinde sabit fonksiyonlar ise

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = B(x) \quad \text{--- (13)}$$

denklemine n. mertebeden sabit katsayılı homojen olmayan lineer diferansiyel denklem denir.

$$D = \frac{d}{dx},\ D^2 = \frac{d^2}{dx^2}, \ldots, D^n = \frac{d^n}{dx^n}$$

türev operatörü ve

$$\ell(D) = D^n + p_1 D^{n-1} + \cdots + p_{n-1} D + p_n \quad \text{--- (14)}$$

olmak üzere (13) denklemi kısaca

$$\ell(D)\, y = B(x) \quad \text{--- (15)}$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki $\ell(D)$ operatörüne sabit katsayılı lineer diferansiyel operatörü denir.

$B(x) = 0$ ise $\quad \ell(D)y = 0$ denklemi sabit katsayılı homojen lineer diferansiyel denklemdir.

Türev Operatörünün Özellikleri

① $\ell_1(D)$ m. mertebeden, $\ell_2(D)$ n. mertebeden lineer diferansiyel operatörler ve y $(m+n)$ defa türevlenebilen bir fonksiyon ise

$$\left(\ell_1(D) + \ell_2(D)\right)y = \ell_1(D)y + \ell_2(D)y$$
$$\left(\ell_1(D).\ \ell_2(D)\right)y = \ell_1(D)\left(\ell_2(D)y\right)$$

şeklinde tanımlanır.

② $\left(\ell_1(D).\ \ell_2(D)\right)y = \left(\ell_2(D)\,\ell_1(D)\right)y$

③ $\left[\ell_1(D)\left(\ell_2(D)\ell_3(D)\right)\right]y = \left[\left(\ell_1(D)\,\ell_2(D)\right)\ell_3(D)\right]y$

④ $\left[\ell_1(D)\left(\ell_2(D) + \ell_3(D)\right)\right]y = \left(\ell_1(D)\,\ell_2(D)\right)y + \left(\ell_1(D)\,\ell_3(D)\right)y$

Teorem 10! $\forall k \in \mathbb{R}$ için aşağıdakiler doğrudur.

1- $\ell(D)\, e^{kx} = e^{kx}\, \ell(k)$

2- $\ell(D)\,(e^{kx} y) = e^{kx}\, \ell(D+k)\, y$

3 a) $\ell(D^2)\, \sin kx = \ell(-k^2) \sin kx$, b) $\ell(D^2) \cos kx = \ell(-k^2) \cos kx$

İspat: 1) $\ell(D) = D^n + p_1 D^{n-1} + \dots + p_{n-1} D + p_n$ şeklindeydi.

$$D e^{kx} = k e^{kx}$$

$$D^2 e^{kx} = D D e^{kx} = D(k e^{kx}) = k^2 e^{kx}$$

$$D^3 e^{kx} = D(D^2 e^{kx}) = D(k^2 e^{kx}) = k^3 e^{kx} \dots$$

$$D^n e^{kx} = k^n e^{kx}$$ olduğundan

$$\begin{aligned} \ell(D) e^{kx} &= D^n e^{kx} + p_1 D^{n-1} e^{kx} + \dots + p_{n-1} D e^{kx} + p_n e^{kx} \\ &= k^n e^{kx} + p_1 k^{n-1} e^{kx} + \dots + p_{n-1} k e^{kx} + p_n e^{kx} \\ &= e^{kx} \{ k^n + p_1 k^{n-1} + \dots + p_{n-1} k + p_n \} \\ &= e^{kx}\, \ell(k) \end{aligned}$$

elde edilir.

2) $D(e^{kx}y) = D(e^{kx})y + e^{kx}Dy = ke^{kx}y + e^{kx}Dy = e^{kx}(D+k)y$

$D^2(e^{kx}y) = D(e^{kx}(D+k)y) = ke^{kx}(D+k)y + e^{kx}(D^2+kD)y$

$= e^{kx}\{D^2 + 2kD + k^2\}y = e^{kx}(D+k)^2 y$

$\vdots$

$D^n(e^{kx}y) = e^{kx}(D+k)^n y$

$\ell(D)(e^{kx}y) = D^n(e^{kx}y) + p_1 D^{n-1}(e^{kx}y) + \dots + p_{n-1}D(e^{kx}y) + p_n e^{kx}y$

$= e^{kx}(D+k)^n y + \dots + p_{n-1}e^{kx}(D+k)y + p_n e^{kx}y$

$= e^{kx}\{(D+k)^n + p_1(D+k)^{n-1} + \dots + p_{n-1}(D+k) + p_n\}y$

$= e^{kx}\ell(D+k)y$

elde edilir.

3) a) $D^2\sin kx = -k^2\sin kx = (-k^2)^1\sin kx$, $D^4\sin kx = k^4\sin kx = (-k^2)^2\sin kx$

$\dots$ $D^{2n}\sin kx = (-k^2)^n\sin kx$ olduğundan

$\ell(D^2)\sin kx = (D^{2n} + p_1 D^{2(n-1)} + \dots + p_{n-1}D^2 + p_n)\sin kx$

$= \{(-k^2)^n + p_1(-k^2)^{n-1} + \dots + p_{n-1}(-k^2) + p_n\}\sin kx = \ell(-k^2)\sin kx$

b) a) ya benzer şekilde yapılır.

Çözüm Yöntemi

$$\ell(D)y=\left(D^n+p_1D^{n-1}+\dots+p_{n-1}D+p_n\right)y=0 \quad \dots (16)$$

sabit katsayılı homojen lineer denklemler için çözüm yöntemleri vereceğiz.

İlk olarak (16) denkleminin özel bir hali olan

$(p_{n-1}D+p_n)y=0$ veya $y'+\frac{p_n}{p_{n-1}}y=0$ birinci mertebeden lineer denklemi dikkate alalım. Değişkenlerine ayrılabilen denklem olup çözümü $\frac{y'}{y}=-\frac{p_n}{p_{n-1}} \Rightarrow \ln y=-\frac{p_n}{p_{n-1}}x+c \Rightarrow y=c.e^{\lambda x}$ formundadır.

Şimdi de (16) denkleminin ikinci mertebeden özel bir hali olan

$(p_{n-2}D^2+p_{n-1}D+p_n)y=0$ veya $y''+\frac{p_{n-1}}{p_{n-2}}y'+\frac{p_n}{p_{n-2}}y=0$ denklemini dikkate alalım. Bu denklem

$(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)y=0$

şeklinde yazılabilir. $(D-\lambda_2)y=u$ dönüşümü yapılırsa

$(D-\lambda_1)u=0$ olur. Buradan $u'-\lambda_1 u=0 \Rightarrow u=ce^{\lambda_1 x}$ bulunur.

$(D-\lambda_2)y=u=ce^{\lambda_1 x} \Rightarrow y'-\lambda_2 y=ce^{\lambda_1 x}$ birinci mertebeden lineer denklem olup çözüm $y=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}$ formundadır.

$\Rightarrow$ Böylece $\ell(D)y=0$ denkleminin $y=e^{\lambda x}$ formunda çözümlere sahip olabileceği görülür.

$\Rightarrow$ $y=e^{\lambda x}$, $\ell(D)y=0$ denkleminin çözümü ise λ ne olmalıdır?

$y=e^{\lambda x}$, $\ell(D)y=0$ denkleminin bir çözümü olması için

$Dy=y'=\lambda e^{\lambda x}$

$D^2y=Dy'=y''=\lambda^2 e^{\lambda x}$

$D^n y=D(y^{n-1})=y^{(n)}=\lambda^n e^{\lambda x}$

ifadeleri denklemde yerine yazılırsa

$$\ell(D)y = \ell(D)e^{\lambda x} = (D^n + p_1 D^{n-1} + \dots + p_{n-1}D + p_n)e^{\lambda x} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^n e^{\lambda x} + p_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \dots + p_{n-1}\lambda e^{\lambda x} + p_n e^{\lambda x} = 0$$

$$\Rightarrow e^{\lambda x}\{\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1}\lambda + p_n\} = 0$$

$e^{\lambda x} \neq 0$ olduğundan $\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0$ olmalıdır. Burada

$$\ell(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1}\lambda + p_n$$

ifadesi λ ya göre n. dereceden bir polinom olup buna $\ell(D)y = 0$ denkleminin karakteristik polinomu denir. Bu karakteristik polinomun kökleri için $y = e^{\lambda x}$ fonksiyonları (16) denklemini sağlayacaktır. Diğer bir deyişle $y = e^{\lambda x}$, (16) denkleminin bir çözümü ise λ sabiti $\ell(\lambda) = 0$ karakteristik denklemini sağlar.

$\ell(D)y = 0$ denkleminin çözümlerini bulabilmek için önce n. dereceden bir polinom olan $\ell(\lambda) = 0$ denkleminin köklerini bulmalıyız.

Bu kökler

1) reel ve farklı

2) reel ve katlı

3) kompleks

olabilir.

① Karakteristik Denklemin Kökleri Reel ve Farklı İse:

$\ell(\lambda)=0$ denkleminin n farklı ve reel kökü λ_i $i=1,2,\dots,n$ olsun. Bu durumda

$$\ell(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)=0$$

formunda yazılabilir ve $\ell(D)y=0$ denkleminin n farklı çözümü

$$y_1=e^{\lambda_1 x},\quad y_2=e^{\lambda_2 x},\quad \dots,\quad y_n=e^{\lambda_n x}$$

olur. $\lambda_1\neq\lambda_2\neq\dots\neq\lambda_n$ için $W(y_1,y_2,\dots,y_n)\neq 0$ olup $y_i=e^{\lambda_i x}$ çözümleri lineer bağımsızdır. $T=\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x},\dots, e^{\lambda_n x}\}$ olmak üzere genel çözüm $y=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}+\dots+c_ne^{\lambda_n x}$ şeklindedir.

Örnek: $y'' - 3y' + 2y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$L(D) = D^2 - 3D + 2$ lineer operatör formu

$L(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ karakteristik denklem

$(\lambda-1)(\lambda-2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$ reel ve farklı kökler olmak üzere $y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^x$, $y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{2x}$ lineer bağımsız çözümler olur. Buna göre de

$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$

$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ genel çözümdür.

Örnek: $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$L(D) = D^4 - 5D^2 + 4$ için $L(\lambda) = \lambda^4 - 5\lambda^2 + 4 = 0$ karakteristik denklemdir. $\lambda^4 - 5\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow (\lambda^2-4)(\lambda^2-1) = 0 \Rightarrow (\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda+1) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 1,\ \lambda_4 = -1$ olacağından lineer bağımsız çözümler $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{-2x}$, $y_3 = e^x$, $y_4 = e^{-x}$ olup genel çözüm

$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^x + c_4 e^{-x}$ şeklindedir.

Örnek: $y''' - 4y'' + y' + 6y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$f(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6 = 0$ karakteristik denklemdir.

$\lambda = -1$ kök olduğundan $(\lambda+1)$ çarpanlardan biridir. Diğer çarpan polinom bölmesi ile bulunur.

$$\begin{array}{l|l} \lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6 & \lambda + 1 \\ \cline{2-2} \mp\lambda^3 \mp \lambda^2 & \lambda^2 - 5\lambda + 6 \\ \hline -5\lambda^2 + \lambda + 6 & \\ \pm 5\lambda^2 \pm 5\lambda & \\ \hline 6\lambda + 6 & \\ 6\lambda + 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow \lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6 = 0$

$\Rightarrow (\lambda+1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0$

$\Rightarrow (\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$ olur.

$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$ için

$y_1 = e^{-x},\ y_2 = e^{2x},\ y_3 = e^{3x}$

lineer bağımsız çözümler olur.

Bunlara bağlı olarak genel çözüm

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$$

şeklindedir.

② Karakteristik Denklemin Kökleri Reel ve Katlı ise:

$\ell(\lambda)=0$ karakteristik denkleminin k katlı reel kökü
$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_k=\alpha$ ve $(n-k)$ tane farklı reel kökü de $\lambda_{k+1},\lambda_{k+2},\ldots,\lambda_n$
olsun. Bu durumda

$$\ell(D)y=(D-\alpha)^k\overbrace{(D-\lambda_{k+1})(D-\lambda_{k+2})\cdots(D-\lambda_n)}^{F(D)}y=0$$

$$\Rightarrow F(D)(D-\alpha)^k y=0$$

yazılabilir. $\lambda_i=\alpha$ köklerine karşılık gelen $y_i=e^{\lambda_i x}=e^{\alpha x}$
$i=1,2,\ldots,k$ çözümleri lineer bağımsız değillerdir. Fakat $i=1,2,\ldots,k$
için $y_i=x^{i-1}e^{\alpha x}$ fonksiyonları $\ell(D)y=0$ denklemini sağlarlar
yani

$$\ell(D)(x^{i-1}e^{\alpha x})=F(D)(D-\alpha)^k(x^{i-1}e^{\alpha x})=F(D)e^{\alpha x}\overbrace{D^k x^{i-1}}^{0}=0$$

dır. Bunların wronksiani sıfırdan farklı olduğundan lineer bağımsız çözümlerdir. O halde k tane katlı ve $(n-k)$ tane farklı reel köke karşılık gelen

$$y_1 = e^{\alpha x},\ y_2 = xe^{\alpha x},\ \ldots,\ y_k = x^{k-1}e^{\alpha x},\ y_{k+1} = e^{\lambda_{k+1}x},\ \ldots,\ y_n = e^{\lambda_n x}$$

çözümleri lineer bağımsız çözümlerdir ve genel çözüm

$$y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 x e^{\alpha x} + \cdots + c_k x^{k-1} e^{\alpha x} + c_{k+1} e^{\lambda_{k+1} x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x}$$

veya

$$y = \left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots + c_k x^{k-1}\right) e^{\alpha x} + c_{k+1} e^{\lambda_{k+1} x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x}$$

şeklindedir.

Sonuç: $\ell(\lambda) = 0$ karakteristik denklemi farklı katlı köklere sahipse örneğin k katlı kökü α, r katlı kökü β, p katlı kökü γ ise $(k+r+p=n)$

$$y = \left(a_1 + a_2 x + \cdots + a_k x^{k-1}\right) e^{\alpha x} + \left(b_1 + b_2 x + \cdots + b_r x^{r-1}\right) e^{\beta x}$$
$$+ \left(c_1 + c_2 x + \cdots + c_p x^{p-1}\right) e^{\gamma x}$$

genel çözüm olur.

Örnek: $y'' - 6y' + 9y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$\ell(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow (\lambda - 3)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 3$$ katlı

reel kök vardır. Lineer bağımsız çözümler

$y_1 = e^{3x}$, $y_2 = xe^{3x}$ şeklinde olup genel çözüm

$y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$ veya $y = (c_1 + c_2 x) e^{3x}$ şeklindedir.

Örnek: $y^{(5)} - 2y^{(4)} + y''' = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$\ell(\lambda) = \lambda^5 - 2\lambda^4 + \lambda^3 = 0 \Rightarrow \lambda^3(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^3 (\lambda - 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = \lambda_5 = 1$$

$y_1 = e^{0x} = 1$, $y_2 = xe^{0x} = x$, $y_3 = x^2 e^{0x} = x^2$, $y_4 = e^{1x} = e^x$, $y_5 = xe^x$

lineer bağımsız çözümler olmak üzere genel çözüm

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) + (c_4 + c_5 x) e^x$$

olur.

③ Karakteristik Denklemin Kökleri Kompleks ise;

$\ell(\lambda)=0$ karakteristik denklemin $\lambda_1=\alpha+i\beta$ kompleks kökü varsa $\lambda_2=\alpha-i\beta$ eşleniği de karakteristik denklemin köküdür. Bunlara karşılık gelen $y_1=e^{(\alpha+i\beta)x}$ ve $y_2=e^{(\alpha-i\beta)x}$ çözümleri lineer bağımsızdırlar. Genel çözüm

$$y=a_1 e^{(\alpha+i\beta)x}+a_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$$

formundadır. Euler formülüne göre

$$y=a_1 e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)+a_2 e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x)$$

$$y=e^{\alpha x}\{(a_1+a_2)\cos\beta x+i(a_1-a_2)\sin\beta x\}$$

$$y=e^{\alpha x}(a_1+a_2)\cos\beta x+i e^{\alpha x}(a_1-a_2)\sin\beta x$$

yazılabilir. Homojen denklemin kompleks çözümünün reel ve sanal kısımları da çözüm olduğundan y_1 yerine $y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$ ve y_2 yerine $y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$ çözümleri alınabilir. Bu durumda genel çözüm $y=c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x+c_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$ veya $y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$ formundadır.

Örnek: $y'' + y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$\ell(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -1 \Rightarrow \lambda = \mp i \Rightarrow \lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i$$

eşlenik kompleks kökler. $\alpha = 0$, $\beta = 1$ olduğundan genel çözüm

$$y = c_1 e^{0x} \cos 1x + c_2 e^{0x} \sin 1x = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

dur.

Örnek: $y^{(4)} - y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$\ell(\lambda) = \lambda^4 - 1 = 0 \Rightarrow (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \mp 1 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -1 \Rightarrow \lambda^2 = i^2 \Rightarrow \lambda = \mp i \Rightarrow \lambda_3 = i,\ \lambda_4 = -i$$

$y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$, $y_3 = e^{0x} \cos \beta x = \cos x$, $(\alpha = 0,\ \beta = 1)$

$y_4 = e^{0x} \sin \beta x = \sin x$ olmak üzere genel çözüm

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$$

olarak bulunur.

Sonuç: $f(\lambda)=0$ karakteristik denkleminin $\lambda_1=\alpha+i\beta$, $\lambda_2=\alpha-i\beta$ eşlenik kompleks kökleri k katlı iseler bu köklere karşı gelen genel çözüm parçası

$$y_I = e^{\alpha x}\left\{\left(c_1+c_2x+\dots+c_k x^{k-1}\right)\cos\beta x+\left(c_{k+1}+c_{k+2}x+\dots+c_{2k}x^{k-1}\right)\sin\beta x\right\}$$

şeklindedir.

Örnek: $y^{(4)}-4y'''+14y''-20y'+25y=0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$f(\lambda)=\lambda^4-4\lambda^3+14\lambda^2-20\lambda+25=0 \Rightarrow \left(\lambda^2-2\lambda+5\right)^2=0$$

$\Delta=(-2)^2-4.1.5=-16<0$ olduğundan kompleks kök vardır.

$$\lambda=\frac{2\mp\sqrt{-16}}{2}=\frac{2\mp\sqrt{16i^2}}{2}=\frac{2\mp 4i}{2}=1\mp 2i$$

$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=1+2i$, $\lambda_3=\lambda_4=1-2i$ katlı kompleks köklerdir.

$y=e^x\left\{(c_1+c_2x)\cos 2x+(c_3+c_4x)\sin 2x\right\}$ genel çözümdür.

Uygulama 2-

① $y''' = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz

$\ell(\lambda) = \lambda^3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ olup genel çözüm

$y = c_1 e^{0x} + c_2 x e^{0x} + c_3 x^2 e^{0x} \Rightarrow y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2$ olur.

② $4y''' - 5y' = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$\ell(\lambda) = 4\lambda^3 - 5\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(4\lambda^2 - 5) = 0$

$\lambda_1 = 0, \quad 4\lambda^2 - 5 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow \lambda = \mp \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow \lambda_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}, \ \lambda_3 = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

şeklinde reel ve farklı kökler var olup genel çözüm

$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + c_3 e^{\lambda_3 x}$

$y = c_1 + c_2 e^{\frac{\sqrt{5}}{2}x} + c_3 e^{-\frac{\sqrt{5}}{2}x}$ bulunur.

③ $y^{(IV)} + 8y'' + 16y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$\ell(\lambda) = \lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = 0 \Rightarrow (\lambda^2+4)^2 = 0$

$\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -4 \Rightarrow \lambda = \mp 2i$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2i, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = -2i$ kompleks katlı kök

vardır. Bu durumda genel çözüm $(\alpha = 0,\ \beta = 2$ için$)$

$y = e^{\alpha x}\{(c_1 + c_2 x)\cos\beta x + (c_3 + c_4 x)\sin\beta x\}$

$y = (c_1 + c_2 x)\cos 2x + (c_3 + c_4 x)\sin\beta x$ olur.

④ $y^{(5)} - 12y''' + 16y'' = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$\ell(\lambda) = \lambda^5 - 12\lambda^3 + 16\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda^3 - 12\lambda + 16) = 0$

$\lambda^3 - 12\lambda + 16 = 0$ ın bir kökü $\lambda = 2$ olduğundan

$\lambda^2(\lambda-2)(\lambda^2+2\lambda-8) = 0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda-2)(\lambda+4)(\lambda-2) = 0$ yazılırsa

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = \lambda_4 = 2,\ \lambda_5 = -4$ için genel çözüm

$y = c_1 + c_2 x + (c_3 + c_4 x)e^{2x} + c_5 e^{-4x}$ bulunur.

(1

4) $y^{(4)} - 5y''' + 6y'' + 4y' - 8y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$f(\lambda) = \lambda^4 - 5\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda - 8 = 0$$

$\lambda = -1$ denklemi sağladığından $(\lambda+1)$ çarpanlardan biridir.

$$\begin{array}{l|l} \lambda^4 - 5\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda - 8 & \lambda + 1 \\ \cline{2-2} \mp \cancel{\lambda^4} \mp \lambda^3 & \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 \\ \hline \quad -\cancel{6\lambda^3} + 6\lambda^2 + 4\lambda - 8 & \\ \quad \pm \cancel{6\lambda^3} \pm 6\lambda^2 & \\ \hline \qquad 12\lambda^2 + 4\lambda - 8 & \\ \qquad \mp 12\lambda^2 \mp 12\lambda & \\ \hline \qquad\quad -8\lambda - 8 & \\ \qquad\quad -8\lambda - 8 & \\ \hline \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$$\lambda^4 - 5\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda - 8 = 0$$

$$(\lambda+1)(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8) = 0$$

$$(\lambda+1)(\lambda-2)^3 = 0$$

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 2$$

$$y_1 = e^{-x} \quad y_2 = e^{2x}, \ y_3 = xe^{2x}, \ y_4 = x^2 e^{2x}$$

Lineer bağımsız çözümler olmak üzere genel çözüm

$$y = c_1 e^{-x} + (c_2 + c_3 x + c_4 x^2) e^{2x}$$

olarak bulunur.

⑤ $y^{(IV)} - 3y''' + 3y'' - y' = 0$, $y(0)=y'(0)=0$, $y''(0) = y'''(0) = 1$

koşullarını sağlayan çözümünü bulunuz.

$P(\lambda) = \lambda^4 - 3\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda = 0$

$\Rightarrow \lambda(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda-1)^3 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$ olmak üzere genel çözüm

$y = c_1 + (c_2 + c_3x + c_4x^2)e^x$ şeklindedir.

- $y(0) = 0 \rightarrow 0 = c_1 + c_2$

$y' = e^x(c_2 + c_3x + c_4x^2) + e^x(c_3 + 2c_4x) = e^x\left(c_2 + c_3 + x(c_3 + 2c_4) + c_4x^2\right)$

- $y'(0) = 0 \Rightarrow 0 = c_2 + c_3$

$y'' = e^x\left(c_2 + c_3 + x(c_3 + 2c_4) + c_4x^2\right) + e^x\left(c_3 + 2c_4 + 2c_4x\right)$

$y'' = e^x\left\{c_2 + 2c_3 + 2c_4 + x(c_3 + 4c_4) + c_4x^2\right\}$

- $y''(0) = 1 \Rightarrow 1 = c_2 + 2c_3 + 2c_4$

$y''' = e^x\left\{c_2 + 2c_3 + 2c_4 + x(c_3 + 4c_4) + c_4x^2\right\} + e^x\left\{c_3 + 4c_4 + 2c_4x\right\}$

$y''' = e^x\left\{c_2 + 3c_3 + 6c_4 + x(c_3 + 6c_4) + c_4x^2\right\}$

• $y'''(0)=1 \Rightarrow 1 = c_2+3c_3+6c_4$

$$\left.\begin{aligned} c_1+c_2&=0\\ c_2+c_3&=0\\ c_2+2c_3+2c_4&=1\\ c_2+3c_3+6c_4&=1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &c_2=-c_3 \Rightarrow c_2=-2\\ &\left.\begin{aligned}-c_3+2c_4&=1\\ 2c_3+6c_4&=1\end{aligned}\right\} \end{aligned} \quad \begin{aligned} c_1&=2\\ 2c_4&=-1 \Rightarrow c_4=-\tfrac{1}{2}\\ c_3&=2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow y = c_1 + (c_2+c_3x+c_4x^2)e^x$

$\Rightarrow y = 2+(-2+2x-\frac{1}{2}x^2)e^x$ istenen özel çözüm dur.

⑥ $y''' + y = 0$ denkleminin $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$ koşulunu sağlayan çözümünü bulunuz.

$l(\lambda) = \lambda^3 + 1 = 0$ $\quad\lambda = -1$ denklemi sağladığı için $(\lambda+1)$ çarpanlardan biridir. Polinom bölmesi yapılırsa diğer çarpan $\lambda^2 - \lambda + 1$ bulunur. O halde

$$\lambda^3 + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda+1)(\lambda^2 - \lambda + 1) = 0 \text{ olur.}$$

$\lambda_1 = -1$ reel kök $\quad \Delta = (-1)^2 - 4.1.1 = -3 < 0$ olduğundan kompleks kök vardır. $\lambda = \dfrac{1 \mp \sqrt{3}i}{2} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\lambda_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ olur.

$y = c_1 e^{-x} + e^{\frac{1}{2}x}\left\{c_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right\}$ genel çözümdür.

$y' = -c_1 e^{-x} + \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}\left\{c_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}\right\} + e^{\frac{1}{2}x}\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}c_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}c_3 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right\}$

$y'' = c_1 e^{-x} + \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}\left\{\left(\frac{c_2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}c_3\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \left(\frac{c_3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}c_2\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right\}$
$\quad + e^{\frac{1}{2}x}\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{c_2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}c_3\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{c_3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}c_2\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right\}$

$$\left.\begin{aligned} y(0)=0 &\Rightarrow 0 = c_1 + c_2 \\ y'(0)=0 &\Rightarrow 0 = -c_1 + \frac{c_2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} c_3 \\ y''(0)=1 &\Rightarrow 1 = c_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{c_2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} c_3\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{c_3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} c_2\right) \end{aligned}\right\}$$

Buradan c_1, c_2, c_3 bilinmeyenleri çözülürse

$c_1 = \frac{1}{3}$, $c_2 = -\frac{1}{3}$, $c_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ olarak bulunur. Buna göre de istenen özel çözüm

$$y = \frac{1}{3} e^{-x} + e^{\frac{1}{2}x} \left\{ -\frac{1}{3} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right\}$$

olarak bulunur.

(7) $y^{(4)}+2y'''+6y''+2y'+5y=0$ denkleminin lineer bağımsız çözümlerinden biri $y_1=\sin x$ olduğuna göre, diğer lineer bağımsız çözümleri ve genel çözümü bulunuz.

$y_1=\sin x$ olduğuna göre $y_2=\cos x$ lineer bağımsız çözüm olup karakteristik denklemin kompleks eşlenik kökleri $\lambda_1=i, \lambda_2=-i$ şeklindedir. O halde karakteristik denklemin çarpanlarından biri $(\lambda-i)(\lambda+i)=\lambda^2+1$ olur. Polinom bölmesi yapılırsa

$$\ell(\lambda)=\lambda^4+2\lambda^3+6\lambda^2+2\lambda+5=0$$

$$(\lambda^2+1)(\lambda^2+2\lambda+5)=0 \quad \text{olur.}$$

$$\lambda^2+2\lambda+5=0 \Rightarrow \Delta=2^2-4.1.5=-16 \Rightarrow \lambda_{3,4}=\frac{-2\mp 4i}{2}=-1\mp 2i$$

diğer kompleks eşlenik köklerdir. O halde lineer bağımsız çözümler $y_1=\sin x$, $y_2=\cos x$, $y_3=e^{-x}\sin 2x$, $y_4=e^{-x}\cos 2x$ olmak üzere genel çözüm

$$y=c_1\sin x+c_2\cos x+e^{-x}\{c_3\sin 2x+c_4\cos 2x\} \quad \text{olur.}$$

⑧ Onuncu mertebeden $L(D)y=0$ denkleminin karakteristik denkleminin kökleri $\{4,4,4,4,\ 2+3i,\ 2-3i,\ 2+3i,\ 2-3i,\ 2+3i,\ 2-3i\}$ olduğuna göre genel çözümü bulunuz.

$\lambda = 4$, 4 katlı reel kök

$\lambda = 2 \mp 3i$, 3 katlı kompleks eşlenik kök olduğundan

genel çözüm

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3) e^{4x}$$
$$+ e^{2x} \{ (c_5 + c_6 x + c_7 x^2) \cos 3x + (c_8 + c_9 x + c_{10} x^2) \sin 2x \}$$

şeklindedir.